1　Taylor の定理について

1.1　準備：平均値の定理

Lemma 1 区間 (a,b) で微分可能な関数 f がある点 $c \in (a,b)$ で最大値をとるならば，$f'(c) = 0$.

Proof.　f は c において最大値だから，$h > 0$ のとき，

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0. \tag{1.1}$$

従って $f'(c) \leq 0$.
　また同様に，$h < 0$ のとき，

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \tag{1.2}$$

であるから，$f'(c) \geq 0$.
　以上より $f'(c) = 0$. □

Theorem 1 (Rolle の定理) 関数 f が区間 $[a,b]$ で連続，また (a,b) で微分可能で，かつ $f(a) = f(b)$ とする．このときある $c \in (a,b)$ が存在し，

$$f'(c) = 0. \tag{1.3}$$

Proof.　f が区間 $[a,b]$ において常に一定値ならば，定理は自明である．
　f が $[a,b]$ で常に一定でない場合は，少なくともある $x \in (a,b)$ において $f(x) > f(a)$ もしくは $f(x) < f(b)$ が成り立つ．
　今，$f(x) > f(a)$ なる $x \in (a,b)$ があるとしよう．有界閉集合 $[a,b]$ はコンパクトであり，コンパクト集合上で連続関数 f は最大・最小値を持つから，f はある $c \in [a,b]$ にて最大値をとる．ところで今ある $x \in (a,b)$ にて $f(x) > f(a)$ であるから，$c \in (a,b)$ でなくてはならない．さて f は点 c にて微分可能であるから，補題 1 より $f'(c) = 0$.
　ある $x \in (a,b)$ において $f(x) < f(b)$ の場合にも同様である．以上より，いずれの場合にも定理は示された．□

Theorem 2 (Lagrange の平均値の定理) 関数 f が区間 $[a,b]$ で連続，また (a,b) で微分可能であるとする．
　このときある $c \in (a,b)$ が存在し，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.4}$$

Proof.　関数

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.5}$$

に Rolle の定理を適用すれば OK．□

Theorem 3 (Cauchy の平均値の定理)　関数 f, g が区間 $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．また $g(a) \neq g(b)$ とし，f' と g' が同時に 0 になることはないものとする．

このときある $c \in (a, b)$ が存在し，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1.6}$$

Proof.

$$h(x) := f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] \tag{1.7}$$

とすると，簡単な計算により $h(a) = h(b)$. そこでこの $h(x)$ に Rolle の定理を適用すれば，ある $c \in (a, b)$ が存在し，

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] \tag{1.8}$$

となる．ここで $g(a) \neq g(b)$ および f' と g' が同時に 0 にならないという仮定から，$g'(c) \neq 0$. そこでこれを $g'(c)[g(b) - g(a)]$ で割れば定理を得る．□

1.2　Taylor の定理

Theorem 4 (Taylor の定理)　関数 f が区間 $[a, x]$ を含むある開区間において n 階微分可能であるとする．このときある $c \in (a, x)$ が存在し，

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^m + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n \tag{1.9}$$

と書ける．

Proof.　ここでは解析概論に倣って証明する．

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^m, && (1.10) \\ G(x) &:= (x - a)^n && (1.11) \end{aligned}$$

とすると，任意の $m < n$ について，

$$F^{(m)}(a) = G^{(m)}(a) = 0. \tag{1.12}$$

然らば，Cauchy の平均値の定理を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \\
&= \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} \\
&= \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{F^{(n)}(c)}{G^{(n)}(c)} \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.
\end{aligned}$$

従って式 (1.9) を得る．□

式 (1.9) 右辺の最後の項を**剰余項**といい，$R_n(x)$ などと書く．

Taylor の定理において，点 a を含むある領域 A において剰余項が $n \to \infty$ で 0 に収束するとき，f は A において

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.13}$$

と展開できる．これを **Taylor 展開**という．また，$a=0$ のとき **Maclaurin 展開**という．

1.2.1 発見法的証明

ここでは積分を使った，より発見法的な証明を以下に記しておく（これは場の量子論における逐次代入法にヒントを得たものである）．

微分積分学の基本定理より，

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(x_1)\mathrm{d}x_1 \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^{x_1} f''(x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\
&= \cdots.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

同様の変形を繰り返せば，

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_a^x \cdots \int_a^{x_{m-1}} f^{(m)}(a)\mathrm{d}x_m \cdots \mathrm{d}x_1 \\
&\quad + \int_a^x \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1
\end{aligned} \tag{1.15}$$

を得る．

ここで，積分

$$\int_a^x \cdots \int_a^{x_{m-1}} \mathrm{d}x_m \cdots \mathrm{d}x_1 \tag{1.16}$$

について考える．これは m 次元実数空間 $\mathbb{R}^m$ における，$x > x_1 > \cdots > x_m > a$ なる領域の体積である．明らかに，変数の順序を入れ替えても積分の表す体積は同じであるから，この体積は結局

$$\frac{(x-a)^m}{m!} \tag{1.17}$$

に等しい．

よって，式 (1.15) は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + R_n(x), && (1.18)\\ R_n(x) &= \int_a^x \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n)\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 && (1.19) \end{aligned}$$

と変形できる．

これにて，Taylor の定理による関数表示の大まかな形が自然に導かれたわけだが，重要なのは剰余項 (1.19) が

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{1.20}$$

の形に表されることである．

このためには一般に，関数 g について

$$\int_a^x \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} g(x_n)\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 = \frac{g(c)}{n!}(x-a)^n \tag{1.21}$$

が示されればよい．ここで，式 (1.21) 左辺は

$$\begin{aligned} & \int_a^x \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} g(x_n)\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \\ = & \int_a^x \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} g(\min\{x_1, ..., x_n\})\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \\ = & \frac{1}{n!} \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x g(\min\{x_1, ..., x_n\})\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

と変形できるから，結局次を示せば良い．

Lemma 2 任意の自然数 n および実数 $x > a$, 区間 $[a, x]$ で *Riemann* 可積分な関数 g について，次が成り立つような $c \in (a, x)$ が存在する：

$$\int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x g(\min\{x_1, ..., x_n\})\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 = g(c)(x-a)^n. \tag{1.22}$$

Proof. 式 (1.22) 左辺を $I_n(g,x)$ とおき，数学的帰納法で示す.

$n=1$ のときに式 (1.22) が成立することは，Lagrange の平均値の定理より自明であろう．そこで，以下 $n=k$ で成り立つと仮定し，$n=k+1$ で成立を示す.

まず，$I_{k+1}(g,x)$ を

$$\begin{aligned} I_{k+1}(g,x) &= \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x g(\min\{x_1,...,x_{k+1}\})\mathrm{d}x_{k+1}\mathrm{d}x_k \cdots \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x g(\min\{\min\{x_1,...,x_k\},x_{k+1}\})\mathrm{d}x_{k+1}\mathrm{d}x_k \cdots \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

のように書き直す．そしてここで，

$$h(y) = \int_a^x g(\min\{y,x_{k+1}\})\mathrm{d}x_{k+1} \tag{1.23}$$

とすると，式 (1.23) は

$$\begin{aligned} I_{k+1}(g,x) &= \int_a^x \cdots \int_a^x h(\min\{x_1,...,x_k\})\mathrm{d}x_k \cdots \mathrm{d}x_1 \\ &= I_k(h,x) \end{aligned} \tag{1.24}$$

となる．帰納法の仮定より，$n=k$ で式 (1.22) が任意の g について（従って $g=h$ のときも）成り立つのであるから，ある $c_1 \in (a,x)$ について

$$\begin{aligned} I_{k+1}(g,x) &= h(c_1)(x-a)^k \\ &= (x-a)^k \int_a^x g(\min\{c_1,x_{k+1}\})\mathrm{d}x_{k+1}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

このとき Lagrange の平均値の定理から，

$$\int_a^x g(\min\{c_1,x_{k+1}\})\mathrm{d}x_{k+1} = g(\min\{c_1,c_2\})(x-a) \tag{1.26}$$

なる $c_2 \in (a,x)$ が存在．故に $c=\min\{c_1,c_2\}$ とすれば，$c \in (a,x)$ で，

$$I_{k+1}(g,x) = g(c)(x-a)^{k+1} \tag{1.27}$$

となる．これにて補題が示された．□

2　対数関数と指数関数

2.1　対数関数

対数関数は，$1/x$ の積分関数として

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \ (x>0) \tag{2.1}$$

によって定義される．定義から明らかに，log は狭義の意味で単調増加かつ連続な関数である．

log には次のような性質がある：

$$\log x^2 = 2\log x. \tag{2.2}$$

これは次のようにして示せる（簡単のため $x > 1$ として証明する）：

$$\begin{aligned}\log x^2 &= \int_1^{x^2} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで第二項において，変数を $t' := t/x$ と変換すれば，

$$\begin{aligned}\log x^2 &= \int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{x} \frac{1}{t'}\mathrm{d}t' \\ &= 2\log x.\end{aligned} \tag{2.4}$$

[この証明は，幾何学的にも理解できる．(2.3) 第二項が $\log x$ に等しいことは，t 軸を $1/x$ 倍にするのと同時に y 軸を x 倍にしても面積が変わらないことに対応している．] 同様にして，

$$\log xy = \log x + \log y, \tag{2.5}$$

$$\log x^n = n\log x \tag{2.6}$$

も示せる．

また $x > 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\log(1/x) &= \int_1^{1/x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_{1/x}^{1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_1^{x} \frac{1}{(xt)}\mathrm{d}(xt) \\ &= -\log x,\end{aligned} \tag{2.7}$$

故に

$$\log(1/x) = -\log x \tag{2.8}$$

を得る．

Remark. これも先ほどの (2.2) 同様，横軸を x 倍にすると同時に縦軸を $1/x$ 倍にしても面積が変わらないことから幾何学的に理解できる．

また，この場合はスケーリングしなくとも，単に面積を計算するだけでも理解できる．

式 (2.8) が $x < 1$ の場合にも成り立つことは，x の代わりに $1/x$ を入れてみれば明らかであろう．

今，$x > 1$ としよう．然らば式 (2.2) より，

$$\begin{aligned} \log x^{2^n} &= \log[(x^{2^{n-1}})^2] = 2\log x^{2^{n-1}} = \cdots \\ &= 2^n \log x. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$ であるから, 右辺は $n \to \infty$ で無限大に発散する．すなわち

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty, \tag{2.10}$$

言い換えれば対数関数は上に有界でないことが示された．

また式 (2.8) から分かるように，

$$\lim_{x\to 0} \log x = -\infty, \tag{2.11}$$

すなわち対数関数は下にも有界でない．故に，対数関数の値域は $(-\infty, \infty)$ である．

2.2 指数関数

log は狭義の意味で単調増加かつ連続な関数であるから，逆関数が存在する．その逆関数を**指数関数**といい，exp と書く．対数関数の値域は $(-\infty, \infty)$ であるから，$\exp x$ は $x \in (-\infty, \infty)$ で定義される．また対数関数の定義域が $(0, \infty)$ であったから，常に $\exp x > 0$ である．

また定義からただちに，

$$\exp 0 = 1 \tag{2.12}$$

である．対数関数が狭義の単調増加関数であったことから，指数関数も狭義単調増加である．

今 $y = \exp x$ としよう（すなわち $x = \log y$）．逆関数の微分法より，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(\log y)'} = y. \tag{2.13}$$

故に

$$y = y' = y'' = \cdots. \tag{2.14}$$

また式 (2.12) より，任意の自然数 n に対して

$$\exp^{(n)}(0) = 1 \tag{2.15}$$

である．これより直ちに，exp の Maclaurin 展開

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{2.16}$$

が得られる．無論，剰余項が 0 に収束しなければ Maclaurin 展開は意味を成さないが，実際

$$R_n(x) = \frac{\exp(c_n)}{n!} x^n \tag{2.17}$$

であり，exp の単調性より $\exp(c_n)$ は上下に有界で，

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x|^n}{n!}. \tag{2.18}$$

この右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので，剰余項は確かに 0 に収束する．

指数関数の性質　対数関数の性質 (2.5) より，ただちに

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y) \tag{2.19}$$

が導ける．また n を自然数とすると，

$$\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n. \tag{2.20}$$

ただし，$e := \exp(1)$ とした．