第 5 章　付録

（5 章の説明）この章は，本編でカバーし切れなかった内容を補うための章です．

この授業は微分積分の基本概念に触れてもらうことを目的としているので，物理・工学などの応用面や，受験で必要となってくる計算技術を十分に説明できなかったところがあります．その中で特に重要なところを，ここで解説します．

1　微分法の重要公式

※この節は講義ではやりません．

微分法の授業で紹介した公式の中で，証明はせずに紹介だけに留めたものが二つありました．それらは応用上非常に重要なので，ここではそれらを順に証明していきたいと思います．

1.1　積の微分法

ここで紹介するのは，２つの関数の積の形で表される関数の導関数を求める公式です．

公式 1 (積の微分法) [1]

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.1}$$

（f, g は微分可能な関数とします.）

[> これは比較的覚えやすい公式です.「片方微分，片方そのまま」と覚えるといいでしょう．

証明. まずは，定義に従って公式の左辺を書き出します:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}. \tag{1.2}$$

これを公式の右辺の形に持っていくには，ちょっとしたトリックが必要です．この式の分母に，$-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$ という項をわざわざ付け加えるのです（これは 0 に等しいので，勝手に足しても問題ありません）．

すると，

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) + [-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)] - f(x)g(x)}{h}$$

[1] ライプニッツ則ともいいます．

となります．角カッコで囲った部分が，付け加えた部分です．わざわざこの位置に入れたのにも，ちゃんと意味があります．カッコを外して計算すると，

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big] \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

となります．最後の行では，極限の公式（積の極限はそれぞれの極限の積，第1章参照）と微分の定義を使いました．

これにて，積の微分法の公式が出ました．□

1.2 合成関数の微分法

合成関数とは，ある関数の中にもう一つの関数が入った「入れ子構造」になっている関数のことです．

式で説明しましょう．今，２つの関数 f, g があるとします．ここで，関係式 $y = f(x)$ に $x = g(t)$ を代入すると，

$$y = f(g(t)) \tag{1.4}$$

という新しい関数関係が生じますが，このときこの $f(g(t))$ を f と g の**合成関数**というのです[2]．

つまり，y は x の関数であり，x は t の関数なのです．t が変化するとそれに応じて x が変化し，x が変化すると y が変化するので，結局 y は t の関数となっているわけです．

イメージとしては，f, g という２つの「箱」が並んでいるイメージです．まず t という値を「箱」g に入れると，x という値が出てきます．ところが，その出口はもうひとつの「箱」f の入り口に直結していて，g から出てきた x はそのまま f に入り，y という値に変換されて出てくるのです．

これから解説するのは，この合成関数の微分係数を簡単に求めるための公式です．

公式 2 (合成関数の微分法)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

記号の意味を確認しておきましょう．$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ は，y の t に関する微分係数，すなわち t に対する局所的な変化率です．［より正確に言うならば，ある特定

[2] 以下，f, g は微分可能な関数とします．

の点 t における変化率です．$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ も同様です（t が特定されているので，$x = g(t)$ によって自動的に x も特定されていることに注意しましょう．$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の方は，そうして決まる点 x における変化率を表します）[3]．]

さて，これも覚えやすい公式です．微分係数の記号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ などをあたかも分数のように考えると，右辺で $\mathrm{d}x$ を「約分」すればちょうど左辺になります．因みにこれは偶然ではなく，むしろ本質的なことです．厳密に言うと，微分の記号を分数のように扱ってはいけないのですが，微分係数の意味に戻って考えると上の「約分」は結果的には正しいのです．このことは，下の証明を見るとよく分かります．

証明． 今回の証明は比較的単純で，微分係数の定義に素直に従えばできます．

微分係数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ の定義は，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{1.7}$$

です．ただしここで，Δt は t の変化量であり，Δy はそれに応じた y の変化量です（t の変化量を h とする書き方に慣れている人は戸惑うかもしれませんが，意味は全く同じです）．

さて，これを公式 (1.5) の右辺の形に持っていくため，記号 Δx（t の変化に応じた x の変化量）を登場させます．式 (1.7) 右辺の lim の中を，

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.8}$$

のように変形するのです．

この時点で既に，形としては公式 (1.5) によく似た式になっていますね．あとは両辺で $\Delta t \to 0$ の極限をとれば良くて，それをやると，

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

となります．Δt が 0 に近づくと，それに応じて Δx も 0 に近づくので，最後の行では最初の $\Delta t \to 0$ を $\Delta x \to 0$ に置き換えました．

仕上げに微分係数の定義（式 (1.7) など）を使えば，証明したかった式 (1.5) が得られます．これにて証明終了です．□

[3] この点を明確にするには，y や t といった記号を使わず，元の関数記号 f, g を使って式 (1.5) を書き直してみるのがよいかもしれません．そうすると，

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.6}$$

となります．

我々は応用上しばしば，元々知っている関数から構成される合成関数に出会うことがあります（下の例題参照）．そのような場合に，上の公式 (1.5) を使えばその微分係数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ が求まるというわけです．

これだけの説明ではよくわからないと思うので，下の例題を見てください．

例題． 次の関数を微分せよ：

$$h(t) = (t^2+1)^{100}. \tag{1.10}$$

解． まず，この $h(t)$ を次のような 2 つの関数の合成関数と考えます：

$$f(x) = x^{100},\ g(t) = t^2+1. \tag{1.11}$$

すなわち，上の f, g を使って h は

$$h(t) = f(g(t)) \tag{1.12}$$

と書けるわけです（$f(x)$ の x のところに，$g(t)$ の式を入れてみればすぐに確かめられます）．

$f(t)$ と $g(t)$ の導関数は簡単に計算できるので，あとは合成関数の微分法を使えば OK ですね．すなわち，$y = f(x), x = g(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= 100x^{99}\cdot 2t \\ &= 200t(t^2+1)^{99} \end{aligned} \tag{1.13}$$

となります．最後の行で，x のところに $g(t)$ の式を代入するのを忘れないようにしましょう（x は我々が便宜上導入した変数に過ぎないので，最後の式に x が残っていてはまずいのです）．

いかがでしょうか．もし合成関数の微分法を知らなければ，式 (1.10) 右辺にある 100 乗を愚直に展開するという，気の遠くなる作業をする以外に微分係数を求める方法はないのです．それがこんなにすっきりと求まってしまうことを思えば，合成関数の微分法がいかに強力であるか理解してもらえると思います．

実際，上で挙げた 2 つの微分公式は，微分計算の上で欠かせない公式なのです．

2 積分法の重要公式

積分法について，これまでいくつかの基本的な公式を紹介してきましたが，まだ紹介していないものの中で，実用上大変重要なものが二つあります．それがこの節で解説する，**部分積分**と**置換積分**の公式です．

2.1　部分積分

4 章では，積分の具体的な計算法として，微分法の公式を逆に使って原始関数を求めるという方法を学びました．しかし，少し複雑な関数になってくると，原始関数を求めるのにも公式一つで，という訳にはいかなくなってきます．微分法の公式を利用する方法だけでは限界があるのです．

そこで，積分したい関数が，より簡単な関数の組み合わせで表されるようなケースを考えましょう．**部分積分**とは，二つの関数 f と g の積になっている関数を積分したいときに使う公式で,「積の積分法」とも言える公式です．これは，f と g のうち**どちらかの原始関数が分かっていることが前提**であることに注意してください．

公式 3 (部分積分) F を f の原始関数とするとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

証明． ※講義では証明は飛ばします．

唐突ですが，公式の右辺第一項を微分してみることから証明は始まります．積の微分法の公式より，

$$\begin{aligned}[F(x)g(x)]' &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \quad (2.2)\\ &= f(x)g(x) + F(x)g'(x) \quad (2.3)\end{aligned}$$

となります．この両辺を a から b まで積分すると，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b [F(x)g(x)]'\mathrm{d}x\\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a)\\ &= \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b \quad (2.4)\end{aligned}$$

となります．二行目へ行くのに，微分積分学の基本公式（定積分は原始関数の差え表される）を使いました．

この左辺第一項が求めたい積分だったので，第二項を移行すれば公式 (2.1) が得られます．(証明終)

この公式を使うときには，二つの関数のうち**どちらを積分してどちらを微分するか**が重要になります．そこは「勘」でやるしかありません（慣れてくれば何となく分かってきますが）．やってみて式が簡単になれば，それが正解ということです．

コメント． 不定積分の場合

上では公式を定積分の形で述べましたが，不定積分の場合は公式 (2.1) で $b = x$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x')g(x')\mathrm{d}x' &= \Big[F(x')g(x')\Big]_a^x - \int_a^x F(x')g'(x')\mathrm{d}x' \\ &= F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(x')g'(x')\mathrm{d}x' \quad (2.5)\end{aligned}$$

となります．ここで不定積分の定義を思い出すと，

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\mathrm{d}x + C \tag{2.6}$$

（定数 $-F(a)g(a)$ の部分は重要でないので，C とおきました）．これが不定積分における，部分積分の公式です．

このような公式は例題で理解するのが一番なのですが，今のところ原始関数が求められる関数がべき関数しかないので，残念ながらその範囲ではあまり使い道はありません．この公式は主に，三角関数や指数・対数関数を含んだ積分で効力を発揮します．そのような関数を扱うカリキュラムで，再び部分積分を使う問題を取り上げたいと思います．

2.2 置換積分

置換積分とは，難しい積分を簡単な積分に変形して解くという，少しだけ高度なテクニックです．具体的には，積分したい関数の一部分に t という名前をつけ，元々x による積分だったものを新しい変数 t による積分に変換します．

ただ闇雲に変数で置き換えればいいわけではなく，どの部分を t と置くかが鍵となってくる，ある意味でセンスが問われる方法とも言えます．

その際に使うのが，以下の公式です．

公式 4 (置換積分)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

（f は連続，g は微分可能な関数とします.）

ややこしいですが，左辺のような形の積分が出てきたら，その中の $g(x)$ という部分を t とおくと，右辺のような形に変形できると言っている公式です．

イメージ　証明の前にまず,「何をやっているか」というイメージを掴んでおきましょう．図 1 を見てください．図の左側が置換積分の公式 (2.7) の左辺，右側が右辺の積分を表しています．

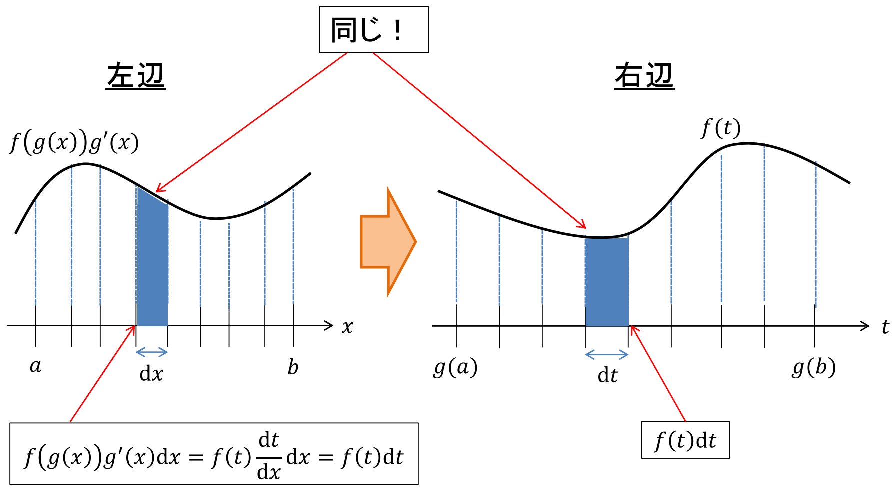

図 1: 置換積分の公式 (2.7) を直観的に表した図です．図の左側が左辺，右側が右辺の積分を表しています．

上の公式は，この左と右の積分が同じだと言っているわけです．なぜ，これら一見全く別物に見える 2 つの積分が同じになるのでしょうか．それは，積分の際に足し合わせている 1 つ 1 つの長方形の面積（図で青色に塗ってある部分）が左と右で同じだからです．

[注] 積分の際，区間の区切り方は左側と右側で対応するように区切ります[4]．

このことは，簡単な計算で確かめられます．まず，左側で足し合わせている中の一つの長方形（青く塗ってある部分）を取り出すと，この部分の面積は[5]，

$$f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x \tag{2.8}$$

で表されます．これを $f(g(x))$ と $g'(x)\mathrm{d}x$ という 2 つの部分に分けて変形していきます．[ちょうど，図の四角で囲ってある部分の式変形に対応します．]

ここで $g(x)$ の部分に t という名前を付けると，

$$f(g(x)) = f(t) \tag{2.9}$$

[4]実は，積分の際の区切り方は等間隔でなくてもいいのです．最終的に無限に細かく区切られればそれで良くて，途中はどのような区切り方になってもかまわないのです．

[5]ここでは区切り方が「無限に細かい」として，長方形からずれている部分の面積は無視します．

となります．

また一方で，微分係数の元の意味に戻れば

$$g'(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

が成り立ちます（$\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ は t の x に対する変化率なので，それに x の変化量である $\mathrm{d}x$ を掛けると t の変化量 $\mathrm{d}t$ になります）．

式 (2.9),(2.10) より，

$$f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

すなわち，左側の積分における 1 つの長方形の面積は，t の言葉で言うと $f(t)\mathrm{d}t$ になるわけです．

一方で，右側の積分における 1 つの長方形の面積は，図から明らかに

$$f(t)\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

ですね．これで，積分の際に足し合わせている 1 つ 1 つの長方形の面積が，左と右で同じであることが確かめられました．

足しているパーツの 1 つ 1 つが同じなのだから，それらを合計（積分）した結果も当然同じです．よって，図の左側の積分と右側の積分が同じであること，すなわち公式 (2.7) が正しいことが確かめられたわけです．

以上が，公式の直観的な説明です．以下で一応，これを厳密に証明しておきます．

証明． ※講義では証明は飛ばします．

この証明も，微分法の公式を利用します．

まず，$f(t)$ の積分関数を $F(t)$ とします．そして唐突ですが，これに $t = g(x)$ を代入して $F(g(x))$ とし，これを x で微分してみます．すると合成関数の微分法より，

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x). \tag{2.13}$$

ここで，最後の式へ行くときに微分積分学の基本定理（積分関数を微分すると元に戻る）を使いました．

それっぽい形が出てきましたね．この両辺を x で a から b まで積分すれば，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b [F(g(x))]'\mathrm{d}x \\ &= \Big[F(g(x))\Big]_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

となります．二行目に行くのに微分積分学の基本公式（定積分は原始関数の差で求められる）を使いました．

ところで，F が f の積分関数であることを思い出せば，

$$
\begin{aligned}
F(g(b)) - F(g(a)) &= \Big[F(t)\Big]_{g(a)}^{g(b)} \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます（定積分は積分関数の差でも求められるのでした）．式 (2.14),(2.15) より，公式 (2.7) が得られます．（証明終）

不定積分の場合　上の公式 (2.7) は定積分の形で述べてあります．これから，不定積分の場合に使える形の公式を導出しておきましょう．

不定積分の形に直すには，積分の上限を変数で置き換えればよいのでした．そこで，公式 (2.7) の両辺において b を x で置き換えると，

$$\int_a^x f(g(x'))g'(x')\mathrm{d}x' = \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (2.16)$$

となります．

左辺はそのまま不定積分になります．また右辺はよく見ると，不定積分

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \int_{\text{定数}}^{t} f(t')\mathrm{d}t' \qquad (2.17)$$

において t を $g(x)$ で置き換えたものになっています (積分下限の「定数」は何でもいいので，$g(a)$ としておけば完全に一致しますね)．それを

$$\Big[\int f(t)\mathrm{d}t\Big]_{t=g(x)} \qquad (2.18)$$

と書くことにすると，置換積分の公式の不定積分版は，

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \Big[\int f(t)\mathrm{d}t\Big]_{t=g(x)} + C \qquad (2.19)$$

となります[6]．

どうでしょうか．公式そのものの形も，その証明もなかなかトリッキーなので，戸惑う人も多いと思います．これは前節の部分積分と同じで，例題を見ないとなかなか理解し難い公式です．以下で，実際にこの公式を使って計算する積分の例を見てみましょう．

3　置換積分の例題

例題．　次の定積分を計算せよ：

$$\int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)^{99}\mathrm{d}x. \qquad (3.1)$$

[6] 不定積分というのは常に定数だけズレる可能性があるので，左辺か右辺のどちらかに”$+C$”を入れておきます．

解．上でも書いたように，置換積分においてはどこを t と置くかが鍵です．置換積分の公式がうまく適用できて，かつ適用後の積分が簡単な形になるよう，あれこれ試してみる必要があります．

結論を言えば，この問題では

$$t = g(x) = x^2 - 1 \tag{3.2}$$

と置けばうまくいきます．このとき

$$g'(x) = 2x \tag{3.3}$$

です．置換積分の公式 (2.7) によると，この $2x$ が元の式 (3.1) のどこかになければなりません．一見するとどこにも見当たらないのですが，これはちょっとしたトリックを使えば解決します．積分の式を，次のように変形するのです：

$$\int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)^{99}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)^{99} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \ \mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

これで公式が適用できて，上の式は

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{99}\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

となります．積分変数が変わったので，それに応じて積分範囲も変わることに注意してください．

あとはこの積分をいつも通りに計算すればよく，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{99}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{100}}{100}\right]_0^1 = \frac{1}{200} \tag{3.6}$$

となります．

大体感じを掴んでもらえたでしょうか．なかなか使いこなすまでが大変な公式ではありますが，部分積分と置換積分は積分計算における必須ツールと言っていいほどよく使います（受験でも，物理・工学などの応用でも）．

微分積分の計算力を身につけたい人は，ぜひ演習問題をたくさん解いて，ここで紹介した計算法に慣れ親しんでほしいと思います．