有限集合に関するノート.

1　有限集合の定義と基本性質

Definition 1 (無限集合・有限集合) 集合 X において，X から自分自身への全射ではない単射 $\varphi : X \to X$ が存在するとき，X を**無限集合**という．

また，無限集合でない集合を**有限集合**という．

写像 $\varphi : X \to Y$ および X の部分集合 S について，S の φ による**像**を

$$\varphi(S) = \{\varphi(x) | x \in S\} \tag{1}$$

と定義する．この概念を用いると，Definition 1 における無限集合の定義は，次のように書き換えることができる．すなわち，次の条件を満たす写像 $\varphi : X \to X$ が存在するとき，X を無限集合という：

1. φ は単射である．すなわち，任意の $x, y \in X$ について，$\varphi(x) = \varphi(y)$ ならば $x = y$.
2. φ は全射でない．すなわち，$\varphi(X) \neq X$.

Proposition 1 有限集合の部分集合は有限集合である．

Proof. X を有限集合，S をその部分集合とする．S が有限集合であることを示せばよい．

仮に S が無限集合であるとすると，S から自分自身への全射でない単射 $\varphi : S \to S$ が存在する．φ は全射ではないから，$S \setminus \varphi(S) \neq \emptyset$. そこで，$x_0 \in S \setminus \varphi(S)$ とする．

ここで，$\psi : X \to X$ を，次のように定義する：

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \in S) \\ x & (x \notin S). \end{cases} \tag{2}$$

このとき，ψ は明らかに単射である．然るに，$x_0 \in S \setminus \varphi(S)$ であるから，$x_0 \in X \setminus \psi(X)$ となり，ψ は全射でない．これは X が有限集合であることに矛盾．よって S は有限集合である．□

Proposition 2 集合 X から集合 Y への全単射 $\varphi : X \to Y$ が存在するとする．このとき，X が無限集合であることの必要十分条件は，Y が無限集合であることである．

Proof.　φ は全単射であるから逆写像 $\varphi^{-1} : Y \to X$ が存在するが，このとき φ^{-1} も全単射であるから，必要性のみを示せば十分である．

X を無限集合とする．然らば，X から自分自身への全射でない単射 $\psi : X \to X$ が存在する．$\tilde{\psi} = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ として，$\tilde{\psi} : Y \to Y$ が単射で，かつ全射でないことを示す.

[単射であること]

$\varphi^{-1}, \psi, \varphi$ は全て単射であるから，それらの合成である $\tilde{\psi}$ も単射である.

[全射でないこと]

$\psi : X \to X$ は全射ではないから，$X \setminus \psi(X) \neq \emptyset$. そこで $x \in X \setminus \psi(X)$ をとり，$y = \varphi(x)$ とする.

このとき，仮に $y \in \tilde{\psi}(Y)$ とすると，$\tilde{\psi}(z) = y$ となる $z \in Y$ が存在する．然るにこのとき

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}(z) = \tilde{\psi}(z) = y = \varphi(x) \tag{3}$$

だが，φ は単射だから，

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = x. \tag{4}$$

従って $\psi(\varphi^{-1}(z)) = x$ となるが，これは $x \in \psi(X)$ を意味するので矛盾．よって $y \notin \tilde{\psi}(Y)$.

故に $Y \setminus \tilde{\psi}(Y) \neq \emptyset$ であるから，$\tilde{\psi}(Y)$ は全射ではない.

以上より，Y から自分自身への全射でない単射 $\tilde{\psi}(Y) : Y \to Y$ が存在するから，Y は無限集合である．□

Proposition 3 無限集合 X から集合 Y への単射 $\varphi : X \to Y$ が存在するとする．このとき，Y は無限集合.

Proof.　φ は X から $\varphi(X)$ への全単射であるから，Proposition 2 より $\varphi(X)$ は無限集合．また $\varphi(X) \subset Y$ であるから，Proposition 1 より Y も無限集合である．□

Proposition 4 自然数の全体 $\mathbb{N}$ は無限集合である.

Proof.　ペアノの公理より，$\varphi : n \mapsto n'$（n' は n の後続数）は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への単射であるが，$1 \notin \varphi(\mathbb{N})$ より φ は全射ではない．よって $\mathbb{N}$ は無限集合．□

Proposition 5 n の任意の自然数として，$S_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$ と定義する．このとき，S_n は有限集合である.

Proof. 数学的帰納法により示す.

1. S_1 は有限集合.

   $S_1 = \{1\}$ であるから，S_1 から S_1 への単射は恒等写像 $I : x \mapsto x$ 以外あり得ないが，これは全射である．よって S_1 は有限集合.

2. S_k が有限集合ならば，S_{k+1} は有限集合.

   S_k が有限集合であるとする．ここで S_{k+1} が有限集合であることを背理法で示すため，S_{k+1} を無限集合と仮定する.

   このとき，S_{k+1} から自分自身への全射でない単射 $\varphi : S_{k+1} \to S_{k+1}$ が存在する．φ は全射ではないから，$S_{k+1} \setminus \varphi(S_{k+1}) \neq \emptyset$. そこで $m \in S_{k+1} \setminus \varphi(S_{k+1})$ をとり，任意の $n \in S_{k+1} \setminus \{m\}$ に対して

$$\psi(n) = \begin{cases} n & (n < m) \\ n - 1 & (n > m) \end{cases} \tag{5}$$

   とすると，$\psi : S_{k+1} \setminus \{m\} \to S_k$. ところが ψ は単射だから，$\psi \circ \varphi : S_{k+1} \to S_k$ も単射．S_{k+1} は無限集合であるから，Proposition 3 より S_k は無限集合となるが，これは数学的帰納法の仮定に矛盾．故に S_{k+1} は有限集合である.

以上より，任意の $n \in \mathbb{N}$ について S_n は有限集合．□

2　順序集合の有限部分集合

順序集合の有限部分集合は極大元・極小元をもつことを証明する．

Definition 2 (順序) 集合 X 上の二項関係 $\leq$ が，任意の $x, y, z \in X$ について次を満たすとき，$\leq$ を X 上の**半順序**，$(X, \leq)$ を**半順序集合**という．

1. $x \leq x$.（反射律）
2. $x \leq y$ かつ $y \leq z \ \Rightarrow x \leq z$.（推移律）
3. $x \leq y$ かつ $y \leq x \ \Rightarrow x = y$.（反対称律）

また，X 上の半順序 $\leq$ が

4. 任意の $x, y \in X$ について，$x \leq y$ または $y \leq x$.（全順序律）

を満たすとき，$\leq$ を X 上の**全順序**，$(X, \leq)$ を**全順序集合**という．

以下，$x \leq y$ を $y \geq x$ とも書く．

$(X, \leq)$ を半（全）順序集合とするとき，$x, y \in X$ について，$x \leq y$ かつ $x \neq y$ が成り立つことを $x < y$ と書き表すことにする．このとき，X の二項関係 $<$ を**狭義の半（全）順序**という．狭義の順序 $<$ に対して，$\leq$ を**広義の順序**ということもある．
以下，$x < y$ を $y > x$ とも書く．

Definition 3 (上界・下界・極大元・極小元) 半順序集合 $(X, \leq)$ とその部分集合 $S(\subset X)$ において，$a \in X$ が S の**上界**であるとは，$a < x$ なる $x \in S$ が存在しないことをいう．また，S の上界 a が S に属するとき，a を S の**極大元**であるという．
同様に，$a \in X$ が S の**下界**であるとは，$a > x$ なる $x \in S$ が存在しないことをいう．また，S の下界 a が S に属するとき，a を S の**極小元**であるという．
特に，$(X, \leq)$ が全順序集合であるとき，$S(\subset X)$ の極大元，極小元をそれぞれ**最大元**，**最小元**という．

一般に，半順序集合 $(X, \leq)$ の部分集合 $S(\subset X)$ について，その上界，下界，極大元，極小元は存在するとは限らないし，存在する場合それが一意とは限らない．S が上界をもつとき，S は**上に有界**であるという．同様に，S が下界をもつとき，S は**下に有界**であるという．また上下に有界な集合を単に**有界**であるという．
$(X, \leq)$ が全順序集合であるとき，その部分集合 $S(\subset X)$ および $a \in X$ について，次が成り立つ：

- a が S の上界 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in S$ について $x \leq a$.
- a が S の下界 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in S$ について $x \geq a$.
- a が S の最大元 $\Leftrightarrow$ $a \in S$ かつ，任意の $x \in S$ について $x \leq a$.
- a が S の最小元 $\Leftrightarrow$ $a \in S$ かつ，任意の $x \in S$ について $x \geq a$.

また，$(X, \leq)$ が全順序集合である場合，$S(\subset X)$ の最大元および最小元は，もし存在するとすれば一意である．実際，$a, b \in S$ が共に S の最大元であるとする．このとき，任意の $x \in S$ について，$x \leq a$ かつ $x \leq b$. ところが，$a, b \in S$ よりこれは $b \leq a$ かつ $a \leq b$ を意味する．従って $a = b$. 以上より，S の最大元は（存在するならば）一意である．最小元についても同様.

以上を踏まえて，S の最大元，最小元をそれぞれ $\max S$, $\min S$ と記す.

Proposition 6 S を，半順序集合 X の空でない有限部分集合とする．このとき，S は極大元，極小元をもつ．特に，X が全順序集合の場合 S は最大元，最小元をもつ.

Proof. 仮に，S が極大元をもたないとしよう．S は空でないから，$x_1 \in S$ がとれる．x_1 は S の極大元ではないから，$x_1 < x_2$ なる $x_2 \in S$ がとれる．x_2 は S の極大元ではないから，$x_2 < x_3$ なる $x_3 \in S$ がとれる．同様の手続きを繰り返して，$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ となる $x_n \in S$ $(n \in \mathbb{N})$ がとれる[1].

ところが写像 $n \mapsto x_n$ は無限集合 $\mathbb{N}$（Proposition 4 より）から S への単射だから，Proposition 3 より S は無限集合となるが，これは仮定に矛盾．よって，S は極大元をもつ.

全く同様に，S が極小元をもつことも示せる．□

[1] このような列の構成法の正当性については，下の Comment 1 参照.

3　有限集合の要素数

任意の有限集合に，要素数と呼ばれる自然数が対応することを示す．

Proposition 7 $\mathbb{N}$ の部分集合 S について，次は同値．

1. S は上に有界である．
2. S は有限集合である．
3. $S \neq \emptyset$ ならば，S は最大値をもつ．

Proof.
[$1 \Rightarrow 2$]
S は上に有界だから，$S \subset S_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．Proposition 5 より S_n は有限集合であるから，Proposition 1 より S_n の部分集合 S も有限集合．
[$2 \Rightarrow 3$]
Proposition 6 より明らか．
[$3 \Rightarrow 1$]
自明．□

Proposition 8 X, Y を有限集合とする．このとき，$X \cup Y$, $X \cap Y$ も有限集合．

Proof.　Proposition 1 より，$X \cap Y$ が有限集合であることは自明．$U = X \cup Y$ が有限集合であることを示す．

$\varphi : U \to U$ を単射とするとき，$\varphi(U) = U$ を示せばよい．そこで $C_1 = U \setminus \varphi(U)$ とする．$C_1 = \emptyset$ を背理法で示すため，$C_1 \neq \emptyset$ を仮定する．

このとき，

$$C_2 = \varphi(U) \setminus \varphi^2(U),\ C_3 = \varphi^2(U) \setminus \varphi^3(U), ...,\ C_n = \varphi^{n-1}(U) \setminus \varphi^n(U), ...$$

とすると，次が成り立つ：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n \neq \emptyset. \tag{6}$$

実際，背理法の仮定より $C_1 \neq \emptyset$. また $C_k \neq \emptyset$ を仮定すると，任意の $x \in C_k$ について $\varphi(x) \in C_{k+1}$ だから，$C_{k+1} \neq \emptyset$. 以上から，任意の自然数 n に対して $C_n \neq \emptyset$ が数学的帰納法により言える．

また，任意の相異なる自然数 n, m について，$C_n \cap C_m = \emptyset$. 実際，一般性を失わず $n > m$ と仮定できるが，このとき $\varphi^{n-1}(U) \subset \varphi^m(U)$. 然らば，$x \in C_n$ を任意にとるとき，$x \in \varphi^{n-1}(U)$ より $x \in \varphi^m(U)$. これは $x \notin C_m$ を意味する．$x \in C_n$ は任意であったから，これにて C_n と C_m は共通部分を持たないことが示された．

ここで，次のような自然数 n_1 が存在することを示そう：

$$\forall n > n_1,\ C_n \cap X = \emptyset. \tag{7}$$

仮に，上式を満たす自然数 n_1 が存在しなかったとする．このとき，$\mathbb{N}$ の部分集合

$$S = \{n \in \mathbb{N} | C_n \cap X \neq \emptyset\} \tag{8}$$

は上に有界でないから，Proposition 7 より S は無限集合である．また選択公理より，任意の自然数 n について $\psi(n) \in C_n$ なる写像 $\psi : S \to X$ がとれる．ところがこれは単射であるから，Proposition 3 より X は無限集合となり，仮定に矛盾．故に式 (7) を満たす $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在する．

同様に，

$$\forall n > n_2,\ C_n \cap Y = \emptyset. \tag{9}$$

なる $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在することも示される．

そこで $n = \max\{n_1, n_2\} + 1$ とすると，

$$C_n = C_n \cap (X \cup Y) = (C_n \cap X) \cup (C_n \cap Y) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

故に $C_n = \emptyset$ となるが，これは先ほど導いた式 (6) に矛盾．これにて $C_1 = \emptyset$ が示された．

従って，$U \setminus \varphi(U) = \emptyset$ すなわち $\varphi(U) = U$ が，言いかえれば φ は全射であることが示された．単射 $\varphi : U \to U$ は任意であったから，これにて $U = X \cup Y$ が有限集合であることが示された．□

集合 X, Y について，X から Y への全単射が存在するとき，$X \simeq Y$ と（ここでは）記す．

Proposition 9 *$S_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$ とする．空でない集合 X について，次は同値．*

1. *X は有限集合．*
2. *$\mathbb{N}$ から X への単射が存在しない．*
3. *ある $n \in \mathbb{N}$ に対して，$X \simeq S_n$．*

*また，3 を満たす自然数 n は一意である（この n を有限集合 X の*要素数*といい，$\#X$ と記す）．*

Proof.
[1⇒2]

Proposition 3, 4 より自明．

[2⇒3]

背理法により示すため，3 が成り立たないと仮定する．

$X_1 = X$ とする．このとき，$X_1 \simeq S_n$ となる自然数 n は存在しない．$X_1 = X \neq \emptyset$ より，$x_1 \in X_1$ なる x_1 がとれる．$X_2 = X_1 \setminus \{x_1\}$ とする．ここでもし $X_2 = \emptyset$ ならば $X_1 = \{x_1\}$ となるが，このとき $X_1 \simeq S_1$ となり矛盾．よって $X_2 \neq \emptyset$. また，もし $X_2 \simeq S_n$ となる自然数 n が存在したとすると，S_n から X_2 への全単射 φ が存在．このとき，

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k) & (k \in S_n) \\ x_1 & (k = n+1) \end{cases} \tag{10}$$

とすれば，$x_1 \notin X_2$ より ψ は S_{n+1} から X_1 への全単射である．然るにこれは $X_1 \simeq S_{n+1}$ を意味するため，上で導いた事実に矛盾．よって $X_2 \simeq S_n$ となる自然数 n は存在しない．ここで $X_3 = X_2 \setminus \{x_2\}$ とすると，上と同様にして X_3 が空でないことと，$X_3 \simeq S_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ は存在しないことが示せる．

同様の操作を繰り返すことで $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を得る[2]が，このとき $n \mapsto x_n$ は $\mathbb{N}$ から X への単射である．これは前提に反するから，結局 3 が成り立たねばならない．

[3⇒1]

前提より，ある自然数 n に対して，S_n から X_2 への全単射 φ が存在．Proposition 5 より，S_n は有限集合．然らば Proposition 2 より，X も有限集合である．

[n の一意性]

$n, m \in \mathbb{N}$ について，$X \simeq S_n$, $X \simeq S_m$ が成り立つとする．このとき，

$$S_n \simeq S_m. \tag{11}$$

一般性を失わず $n \geq m$ と仮定できる．式 (11) より，S_n から S_m への全単射 φ が存在．このとき $\varphi(S_n) = S_m \subset S_n$. そこで $\tilde{\varphi} : S_n \to S_n$, $k \mapsto \varphi(k)$ とするとこれは単射であるが，Proposition 5 より S_n は有限集合であるから，$\tilde{\varphi}$ は全射でなくてはならない．よって，

$$S_n = \tilde{\varphi}(S_n) = \varphi(S_n) = S_m.$$

すなわち $n = m$. これにて，$X \simeq S_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ は一意であることが示された．□

Comment 1 (列の再帰的定義について) 上記の *Proposition 6, 9* の証明で用いられた，集合 X における列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の構成法がどのように正当化されるかについて議論する．

一般に，次のようなアルゴリズムを考える．

1. X の部分集合 X_k について，$X_k \neq \emptyset$ を示す．

[2] このような列の構成法の正当性については，下の Comment 1 参照．

2. $x_k \in X_k$ をとる．

3. x_k, X_k によって定まるある条件を満たす $X_{k+1}(\subset X)$ をとる．

4. k を $k+1$ で置き換え，*1* に戻る．

このようなアルゴリズムによって X における列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を構成する手法は，上に挙げた命題のみならず，数学のあらゆる定理の証明に用いられる．しかし，このような論法（ここでは**再帰的定義**と呼ぶことにする）が正当であることは，決して自明ではない．

まず第一に，上記の方法では，ある操作を「限りなく繰り返す」ことで列を構成することになっている．しかし，現実に何かの操作を「限りなく繰り返す」ことは不可能であるから，これは実際には，要求される性質を満たす写像 $n \mapsto (x_n, X_n)$ が存在することを根拠とした方法なのである．

もし，そこで要求される条件が

$$(x_{k+1}, X_{k+1}) = F(x_k, X_k) \tag{12}$$

のような漸化式によって与えられるものであれば，これを満たす列 $\{(x_n, X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が（一意に）存在することは，単なる数学的帰納法の簡単な応用問題として証明することができる．しかし上のアルゴリズムでは，$x_k(\in X_k)$ のとり方や，$X_{k+1}(\subset X)$ のとり方に任意性がある．こうなると，問題は決して容易なものではなくなる．

このような状況においても，要求される性質を満たす写像 $n \mapsto (x_n, X_n)$ が存在することは，次の補題によって保障される．

Lemma 1 集合 X およびその部分集合系 $\Gamma(\subset P(X))$ について，次が成り立つとする．

- $X_1 \in \Gamma$.
- $\emptyset \notin \Gamma$.

また，

$$\Omega = \{(x, S) \in X \times P(X) | (S \in \Gamma) \wedge (x \in S)\}$$

とし，$G : \Omega \to P(\Gamma) \setminus \{\emptyset\}$ とする．このとき，次を満たす写像 $\Phi : \mathbb{N} \to X$ および $\Psi : \mathbb{N} \to \Gamma$ が存在する．

- $\Psi(1) = X_1$.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$\Phi(n) \in \Psi(n)$.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$\Psi(n+1) \in G(\Phi(n), \Psi(n))$.

上記の G が,「x_k, X_k によって定まるある条件を満たす集合」の集合を与える写像であり，Γ は X の空でない部分集合からなる集合である．G が $P(\Gamma)$ への写像であるという仮定が,「x_k, X_k によって定まるある条件」を満たすようにとられた新たな集合 X_{k+1} が空でないことを保証しており，これによって上記の操作 *1*〜*4* を限りなく繰り返すことが可能になるのである．

なお，上記補題を証明するには選択公理（と同値な命題であるツォルンの補題）を必要とする．詳細は「集合列の再帰的定義に関するノート」を参照のこと．

例として，*Proposition 9* における *2*⇒*3* の証明に用いた列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，上記補題を用いて構成してみよう．証明で用いた前提（背理法の仮定も含める）のもと，次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \{S \in P(X) | \forall n \in \mathbb{N}, S \not\simeq S_n\} \setminus \{\emptyset\}, \\
G(x,S) &= \{S \setminus \{x\}\}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

このとき，Γ, G は *Lemma 1* における前提条件を全て満たす．実際，

- $\Gamma \subset P(X)$.

  Γ の定義より自明．

- $X_1 \in \Gamma$.

  命題の前提（$X(= X_1) \neq \emptyset$）および背理法の仮定（$X \simeq S_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ は存在しない）より自明．

- $\emptyset \notin \Gamma$.

  Γ の定義より自明．

- $G : \Omega \to P(\Gamma) \setminus \{\emptyset\}$

  $(x,S) \in \Omega$ とする．G の定義より $S\setminus\{x\} \in G(x,S)$ だから，$G(x,S) \neq \emptyset$. また $S \in \Gamma$ より，$S \simeq S_n$ なる $n \in \mathbb{N}$ は存在しない．故に $S \setminus \{x\} \in \Gamma$ である[3]．従って $G(x,S) \subset \Gamma$, すなわち $G(x,S) \in P(\Gamma)$. 以上より $G(x,S) \in P(\Gamma) \setminus \{\emptyset\}$.

以上より，所望の $\Phi : \mathbb{N} \to X$ および $\Psi : \mathbb{N} \to \Gamma$ を得る．ここで $x_n = \Phi(n)$, $X_n = \Psi(n)$ とすると，次が成り立つ．

---

[3]詳細．もし仮に $S \setminus \{x\} = \emptyset$ ならば，$S = \{x\}$ となるがこれは $S \simeq S_1$ を意味するから，矛盾．故に $S \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

また，仮にある自然数 n について $S \setminus \{x\} \simeq S_n$ とすると，S_n から $S \setminus \{x\}$ への全単射 φ が存在する．ここで

$$
\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k) & (k \in S_n) \\ x & (k = n+1) \end{cases} \qquad (14)
$$

とすると，$\psi : S_{n+1} \to S$ は全単射であるが，これは $S \simeq S_{n+1}$ を意味するから矛盾．従って任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$S \setminus \{x\} \not\simeq S_n$.

以上から，$S \setminus \{x\} \in \Gamma$ が言える．

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$x_n \in X_n$.
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$X_{n+1} = X_n \setminus \{x_n\}$.

よって $\Phi : n \mapsto x_n$ は確かに $\mathbb{N}$ から X への単射である．